14 дәріс. Тақырыбы: Екінші ретті сызықтыр. Эллипс. Гипербола. Парабола.

Екінші ретті сызықтар.

Эллипс.

1. Эллипс деп берілген F_1 және F_2 нүктелерін әрқайсысының қашықтықтарының қосындысы берілген PQ (PQ › F_1F_2) кесіндісінің ұзындығына тең болуын жазықтықтың барлық нүктелерінің жиыны аталады.

F_1 және F_2 нүктелері эллипстің фокустары, ал олардың ара қашықтығы – фокальдың қашықтығы деп аталады.

М берілген эллипс нүктесі болғанда F_1M және F_2M кесінділері М нүктесінің фокальдық радиустары деп аталады. Олардың ұзындықтарын да М нүктесінің фокальдық радиустары деп аталады. F_1F_2 =2c,FQ=2a болсын. PQ› F_1F_2 болғандықтан a›c.

Эллипс аңықтамасы бойнша F_1 және F_2 нүктелері беттесе, эллипс радиусы а-ға тең шеңберге айналады. Бұл жағдайда эллипс фокустары шеңбек центрімен беттеседі. Сөйтіп, шеңбек эллипстің дербес түрі болады.

2. $O\vec{i}\vec{j}$ тікбұрышты координаталар системасында γ теңдеуін табамыз. Мұнда О нүктесі ретінде F_1 F_2 кесіндісінің ортасы алынған, ал $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF}$ (65 сурет). Таңдалған координаталар системасында фокустар F_1 және F_2 координаталар F_1 (c, o), F_2 (-c,o) болады, сондықтан эллипстің кез-келген М(х; у) нүктесінің фокальдық радиустары $F_1M =$ $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$, $F_2M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (1) болады.

Эллипстің анықтамасы бойынша $F_1M + F_2M = 2a$, одан $\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ табылады. Бұл теңдеуді $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ түрінде жазамыз. Осыны квадрат дәрежеге шығарып, ұқсас мүшелерін келтірсек, $a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc$ теңдігін аламыз. Тағы да квадрат дәрежеге шығарып, жай түрлендіргеннен кейін.

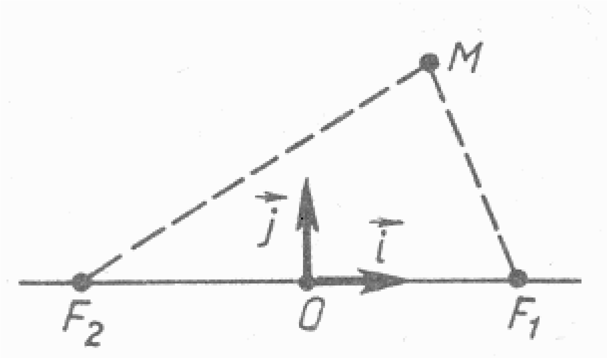
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{в^2} = 1 \qquad (2)$$

шығарамыз. Мұнда

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (3)$$

Сонымен, γ эллипстің әрбір нүктесінің координаталары (2) теңдеуді қанағаттандыратыны дәлелденді. Керісінше: координаталары (2) теідеуді қанағаттандыратын әрбір М нүктесі γ эллипсіне тиісті немесе $F_1M + F_2M = 2a$, екенің дәлелдейміз. (1) формулаға (2) теңдеуден y^2-тың мәнің қойып. (3) тендікті еске алып, $F_1M = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$,

$F_2M = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$ табымыз.



65-сурет

(2) теңдеуден $\mid x \mid \leq a$ болатынын, және $o\langle \frac{c}{a} \langle 1$ екенін ескерсек, $a - \frac{c}{a}x \rangle 0$, $a + \frac{c}{a}x \rangle 0$, сондықтан

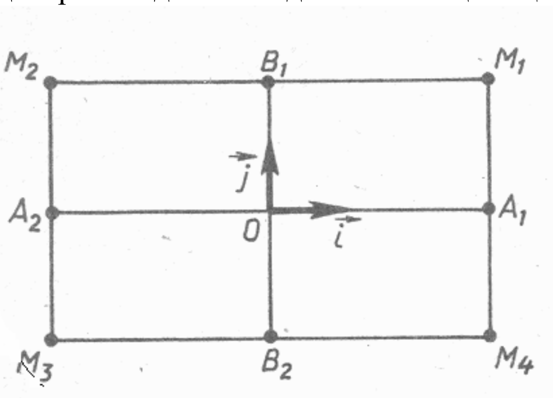
$$F_1M = a - \frac{c}{a}x\,, \quad F_1M = a + \frac{c}{a}x \qquad (4)$$

Олай болса, $F_1M + F_2M = 2a$. Яғни $M \in \gamma$. Сонымен, (2) тендеу эллипстің теңдеуі болады. Ол эллипстің канандық теңдеуі деп аталады.

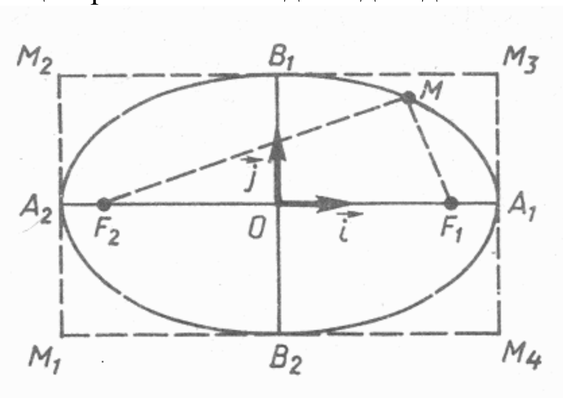
Ескерту: F_1 және F_2 фокустары беттескен жағдайда С=О, сондықтан (3) теңдеуден a=b. Бұл жағдайда (2) теңдеу $x^2 + y^2 = a$ түріне айналады. Бұл теңдеудің радиусы a, центрі координаталар басында болатын шеңберді анықтайды. Бұл тағы да шеңбер эллипстің дербес түрі деген қорытындыны растайды.

3. γ эллипсінің (2) кокондық пеңдеуін оның геометриялық қасиеттерін зерттеуге пайдаланамыз. Егер $M(x.y\ ) \in \gamma$ болса, онда x, y (2) теңдеуді қанағаттандырады, олай болса $x^2 \leq a^2$, $y^2 \leq b^2$, демек $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, яғни эллипстің барлық нүктелері 66-сүретте көрсетілген $M_1M_2M_3M_4$ тіктөртбұрышқа тиісті болады.

Егер $M(x,y\ ) \in \gamma$ болса, онда $M'(-x,-y) \in \gamma$, сондықтан О нүктесі эллипстің симметрия центрі болады. Кейіндік эллипстің басқа симмтерия центрі болмайтын дәлелденеді.



66-сурет



67-сурет

Егер $M(x,y\ ) \in \gamma$ болса, онда $M'(-x,y\ ) \in \lambda$ және $M'(x,-y\ ) \in \gamma$ болады. Осыдан O_x және O_y түзулері эллипстің симметрия оьтері болатының көреміз.

Шеңбер емес эллипстің басқа симметрия осьтері жок екенің дәлелдеуге болады. Бұл жағдайда фокустар арқылы отетін бірінші немесе фокальдық симмтерия осі деп аталады, ал оған перпендикуляр осі- екінші симметрия осі деп аталады. Әрбір симметрия осі эллипспен екі нүктеде қиылысады: $A_1(a,o\ )$, $A_z(-a,0)$ және $B_1(0,b\ )$, $B_2(0,-b\ )$. Бұл нүктелер эллипстің төбелері деп аталады.

A_1A_2 және B_1B_2 кесінділері эллипстің үлкен және кіші осьтері деп аталады. Эллипстің центрі О осы кесінділердің беттескен ортасы болады. $OA_1 = OA_2 = a$, $OB_1 = OB_2 = b$ болатына созсіз. Осы сандар эллипстің үлкен және кіші жарты осьтері деп аталады.

(2) теңдеумен берілген эллипстің түрін байқау үшін, оның бірнеше нүктерлерін тұрғызып көру керек. Бұл жерде бірінші ширекте орналасқан нүктелерін қарастырса болғаны, себебі эллипс координаталар осьтерінен симметриялы орналасқан. Бірінші ширектегі $M(x, y)$ нүктелері үшін $(x \geq o, y \geq o)$ $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ болады. x 0-ден a-ға дейін өскенде M нүктесінің ординатасы y b – дан 0-ге дейін кемиды. Эллипс (67-суретте) кескінделген.

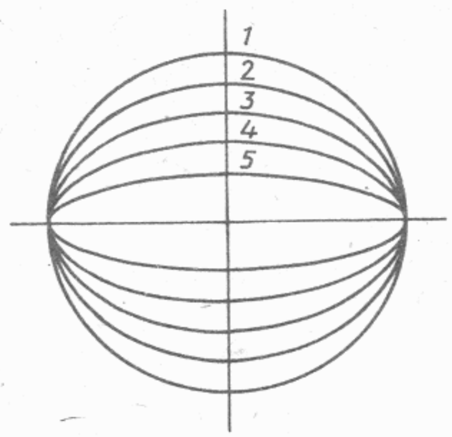
4. Эллипстің эксцентриситеті деп $\varepsilon = \frac{c}{a}$ – санын атайды. Мұнда c-фокальдық қашықтық, *a* – үлкен жарты осі. Осыдан, $o \leq \varepsilon \langle 1$ болады. Экцентриситеті нөлге тең болуы үшін c=0 міндетті, яғни эллипс шеңбер болуы керек. Эксцентриситетіне байланысты эллипстің формасы қалай өзгеретінің анықтаймыз. Ол үшін $\frac{b}{a}$ қатынасын эксцентриситет арқылы өрнектейміз.

$c^2 = \varepsilon a, b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$.Осыдан екенін табамыз.

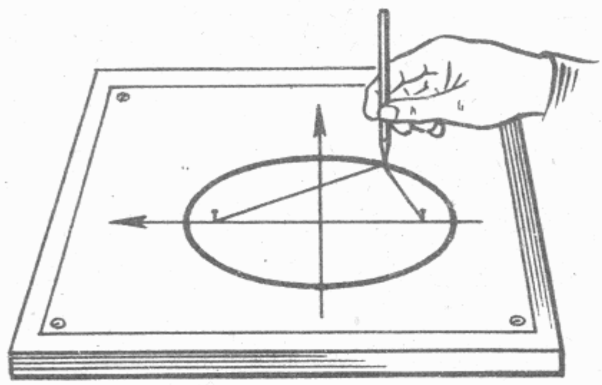
$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \qquad (5)$$

Бір ғана үлкен осі болатын, бірақ эксцентриситеттері әртүрлі эллипстер системасын қарастырамыз. (5) теңдіктен ε неғұрлым көп болса, *b* саны 0-ге ұмтылатыны байқалды. Тағы да ε неғұрлым кіші болса, *b* соғұрлым үлкен болады, ε нөлге тең болғанда *b*=*a* және эллипс шеңбер болады.

Сөтіп, эксцентриситет үлкейген сайын эллипстің «ені» кішірейеді, ол ұзынша болады. 68-суретте эксцентриситеттері $0 = \varepsilon_1 \langle \varepsilon_2 \langle \varepsilon_3 \langle \varepsilon_4 \langle \varepsilon_5$ теңсіздіктерін қанағатттандыратын эллипстер кескінделген.



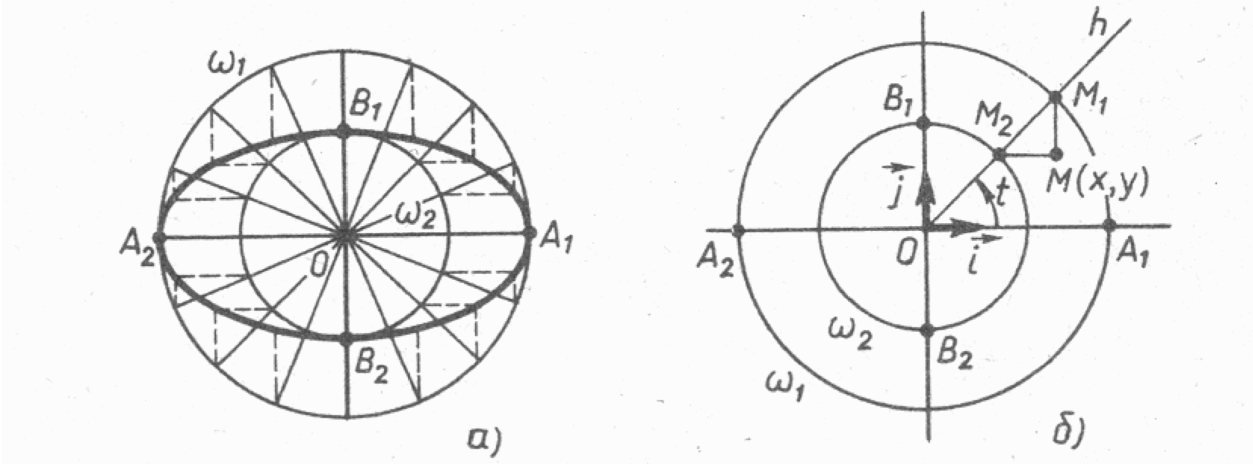
68-сурет


69-сурет

5.Эллипс анықтамасы оны сызудың қарапайым әдісін көрсетуге мүмкіндік береді. Қағазға екі нүктені белгілеп, оларды эллипстың фокустары деп тағайындаймыз. Ұзындығы *2a*-ға тең жіп үзігін алып, оның ұштарын эллипстің фокустарына бекітеміз. Егер карандаш ұшымен жіпті керіп, (69-суретте) көрсетілгендей жіпті үнемі кере отырып каранлаш ұшын жылжытса, ол берілген фокустары және үлкен осінің ұзындығы *2a* болатын эллипс сызады.

Циркуль мен сызғыштың көмегімен A_1A_2 ЖӘНЕ B_1B_2 осьтері берілгендіктен эллипс тұрғызу әдісін қарастырамыз. A_1A_2 және B_1B_2 кесінділерін диаметр деп алып, екі концентрлі ω_1 ω_2

шеңберлерін тұрғызамыз. (70,а-сурет)



70-сурет

Үлкен шеңбердің бірнеше радиустарын жүргіземіз. Олардың ұштарымен кіші оське параллель тузулер, осы радиустардың кіші шеңбермен қиылысқан нүктелерінен үлкен осіне паралель тузулер жүргіземіз. Бір радиусқа сәйкес жүргізілген ось түзулердің қиылаысқан нүктелері берілген осьтері болатын эллипстің нүктелері болады. Бұл әдістің дұрыстығын негіздеу үшін, (70,б-суретте) көрсетілгендей тікбұрышты координаталар системасын таңдап аламыз. Басы О нүктесі болатын кез келген h сәулесін аламыз. Оның ω_1 және ω_2 шеңберлерімен қиылысқан нүктелерін M_1 және M_2 деп белгілейміз. Ал $M(x,y)$ - тұрғызылған нүктелерінің бірі болсын делік. OA_1 және h сәулелерінің арасындағы бұрышты t деп белгілейміз. Олай болса, M_1 және M_2 нүктелерінің координаталары $M_1(a\cos t; a\sin t)$, $M_2(b\cos t, b\sin t)$ болады. М және M_1 нүктелерінің абсциссалары бірдей, ал М және M_2 нүктелерінің ординаталары бірдей болғандықтан,

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \qquad (6)$$

болады.

(6) теңдіктен $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ аламыз, яғни тұрғызылған М нүктесінің осьтері A_1A_2 және B_1B_2 болатын γ эллипсіне тиісті.

6. (6) теңіктері (2) канондық теңдеумен берілген γ эллипсінің параметрлік теңдеулері деп атайды. Бұл терминнің мағынасы: t параметрінің кез келген мәні үшін координаталары (6) теңдіктермен анықталатын М(x,y) нүктесі γ эллипсінде жатады, себебі

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=1$$

Керісінше, $M(x,y)\in\gamma$ болса, (6) теңдіктер орындалатындай t параметрін табылатынын